曲線の曲率の積分あれこれ (部分多様体の幾何学の深化と展開)

AUTHOR(S):

榎本, 一之

CITATION:

榎本, 一之. 曲線の曲率の積分あれこれ (部分多様体の幾何学の深化と展開). 数理解析研究所講究録 2020, 2152: 58-63

ISSUE DATE:

2020-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/255076

曲線の曲率の積分あれこれ

榎本 一之

筆者は, 今までの研究活動の中で, いろいろな形の曲線の曲率の積分に遭遇してきた。それらの中のいくつかについて紹介したい。

1　閉じていない曲線の絶対全曲率, 絶対全振率など

まず, ユークリッド平面 E^2 内の曲線について考えてみよう。C を E^2 内の曲線, $x(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ を C の弧長パラメータによる表現とする。このとき, $T(s) = dx/ds$ は単位接ベクトルとなり, $N(s)$ を (T, N がこの順で正の方向となるような) 単位法ベクトルをすると, C の (符号つきの) 曲率 $k(s)$ は $k = \langle dT/ds, N \rangle$ により定義される。ここで, 曲率をその曲線に沿って積分したものとして, 次の 2 つの量について考えよう。

$$(I) \quad \int_0^L k(s)\, ds \qquad\qquad (II) \quad \int_0^L |k(s)|\, ds$$

この 2 つの積分量にはそれぞれ特徴がある。例えば閉曲線について考えると, (I) の積分　(以下, 簡単のため $\int k$ と書く) の値はつねに 2π の整数倍となり, その整数とはその閉曲線の「回転数」に他ならない。とくに単純閉曲線の場合は, $\int k = 2\pi$ または $\int k = -2\pi$ が成り立つ。これに対して (II) の積分　(以下, $\int |k|$ と書く) は曲線の形の違いをもっと敏感に反映する。また, (II) の積分についてはは閉曲線の場合はつねに $\int |k| \geq 2\pi$ が成り立つ。ここで等号が成り立つのは曲線 C が凸閉曲線の場合であり, その場合に限る。筆者は, 閉じていない平面曲線の $\int |k|$ について [5] で研究した。そこでは, p, q を E^2 の点, T_p, T_q を単位ベクトル, L を正の定数として, 始点が p, 終点が q であり, p, q おける接ベクトルの方向がそれぞれ T_p, T_q であって, さらに長さが L であるような曲線の集合を $\mathcal{C}(p, q, T_p, T_q, L)$ で表し, $\mathcal{C}(p, q, T_p, T_q, L)$ における $\int |k|$ の値の下限とその下限を与える曲線の形を研究した。その結果, 閉曲線と閉じていない曲線では次のような違いがあることがわかった。ここで, 閉曲線の場合は $p = q$, $T_p = T_q$ とすることによって含むことができることに注意しておく。

- 閉曲線の場合は $\int |k|$ を最小にする曲線の形は長さ L に依存しないが, 閉じていない曲線の場合は, 一般には, 長さ L に依存する。

- 閉曲線の場合は $\int |k|$ を最小にする滑らかな曲線が存在するが, 閉じていない曲線の場合は, 多くの場合, $\int |k|$ の値が下限に近づくと, 極限においては端点もしくは曲線の中途で角 (かど) が現れ, 滑らかな曲線ではなくなる。

- 閉曲線の場合は $\int |k|$ を最小にする曲線の形には自由度があるが, 閉じていない曲線の場合は, 多くの場合, 形は一意的に定まる。

[7], [8] では同様の問題を 2 次元球面 S^2 上の曲線に対して考察した。S^2 上では閉曲線であっても $\int |k|$ の最小値は長さに依存し, 長さ L の閉曲線では最小値は $\sqrt{4\pi^2 - L^2}$ であり, この値を与える曲線は小円または大円である。閉じていない曲線の場合については, $\inf\{\int_C |k| \mid C \in \mathcal{C}(p,q,T_p,T_q,L)\}$ を与える曲線は, 高々3 個の大円弧と小円弧をつないでできる曲線であることがわかる。ただし, この場合も端点ないしは弧のつなぎ目で角が現れることはあり得る。

[9] では 3 次元 Euclid 空間 E^3 内の曲線について同様の問題を考察した。E^3 内の曲線については曲率は $\kappa(s) = |d^2x/ds^2|$ によって定義される非負の量であり, この積分 $\int_C \kappa(s)\,ds$ は絶対全曲率と呼ばれる。E^3 内の閉曲線については古典的な Fenchel の定理 (1929 年) によって $\int_C \kappa \geq 2\pi$ が成り立つ (平面凸閉曲線の場合に限り等号成立) が, 閉じていない曲線について $\inf\{\int_C \kappa\,ds \mid C \in \mathcal{C}(p,q,T_p,T_q,L)\}$ を考えると, 多くの場合, 下限に近づくときの極限曲線は端点で角を持つ 2 辺形になる。

さて, E^3 内の曲線の単位接ベクトルを T, 主法線ベクトルを N, 従法線ベクトルを B, 曲率を κ, 捩率を τ とすると, 曲線の弧長パラメータ s に関する微分について, Frenet の公式

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = \kappa N \\ \dfrac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B \\ \dfrac{dB}{ds} = -\tau N \end{cases}$$

が成り立つ。これより, 絶対全曲率 $\int \kappa\,ds$ は T を単位球面 S^2 上の曲線と見たときの曲線 (tangent indicatrix) の長さに他ならないことがわかる。$\mathcal{C}(p,q,T_p,T_q,L)$ の曲線については, tangent indicatrix は S^2 上の 点 T_p から T_q へ至る曲線となるが, その最小値が単に T_p と T_q の間の距離にならないのは, 元の曲線が p から q へ至る曲線であるため tangent indicatrix は単位ベクトル $Z = \overrightarrow{pq}/|pq|$ をその convex hull の内部に持たなければならないからである。元の曲線の長さが定数 L であるという条件が加わると, tangent indicatrix の形にはさらに制限が加わり, その制限のもとで tangent indicatrix の長さの最小値を求めることとなる。

さて同様の問題は, 主法線ベクトル N, 従法線ベクトル B についても考えることができる。$N(s)$ を単位球面 S^2 上の曲線と見たとき, その長さは $\int_C \sqrt{\kappa^2+\tau^2} ds$ に等しい。また, $B(s)$ を単位球面 S^2 上の曲線と見たとき, その長さは $\int_C |\tau|\, ds$ に等しい。筆者は, [10] において, 端点と端点における B の方向と長さを固定した E^3 内の曲線族 $\mathcal{C}(p,q,B_p,B_q,L)$ に対して $\int |\tau|\, ds$ (絶対全振率) の最小値を考察した。この場合も, $\int \kappa\, ds$ の場合に似て, 多くの場合, 下限に近づくと曲線は端点もしくは中途の点で角ができる折れ線に近づく。一方で $\int \kappa\, ds$ の場合と異なるところもあり, $\int \kappa\, ds$ では曲線の長さ L が大きくなるほど値が大きくなる傾向があるのに対して, $\int |\tau|\, ds$ の場合は L が小さくなるほど値が大きくなる傾向がある。N の単位球面上の曲線としての長さ $\int_C \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\, ds$ については, [12] で, 端点と端点における N の方向を固定した曲線族 $\mathcal{C}(p,q,N_p,N_q)$ における下限の値を考察している。この場合は、螺旋形の曲線が下限を与える唯一の曲線となることがあり, $\int \kappa\, ds$ や $\int \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\, ds$ との性質の違いを見せている。これらの積分量を統一的に捉えるため, $\int \sqrt{\kappa^2 \cos^2\alpha + \tau^2 \sin^2\alpha}\, ds$ (α は定数) を最小にする曲線の形に関する研究を現在進行させている。

2　球面曲線の等周不等式の拡張

C を S^2 内の単純閉曲線とするとき, s を弧長パラメータ, L を周長, A を C によって囲まれる領域の面積, $k(s)$ を符号付きの曲率とすると,

$$\int_0^L k(s)\, ds = 2\pi - A$$

がなりたつ。この式と等周不等式

$$L^2 \geq 4\pi A - A^2$$

を組み合わせると, S^2 上の単純閉曲線について

$$L^2 + \left(\int_0^L k\, ds\right)^2 \geq 4\pi^2$$

が成り立つことがわかる。[2] において筆者はこの不等式が「単純閉曲線に regularly homotopic なすべての閉曲線」について成り立つことを示した。2 つの滑らかな曲線が滑らかな曲線のみによるホモトピーでつながるとき, これらの曲線は regularly homotopic であると言うが, S^2 上の閉曲線については regular homotopy class は 2 つしかないことが知られている。単純閉曲線が属さない regular homotopy class においては, $\int k(s)\, ds = 0$ である「8 の字曲線」で長さが短いものを考えればわかるように, この不等式

は成立しない。この不等式は, 3 次元球面 S^3 内の平坦 (Gauss 曲率がいたるところで 0) なトーラスの大域的な性質の研究の中で派生的に得られたものであり, [2] における証明も平坦トーラスの性質に基づいた間接的な証明になっているので, もっと直接的な証明が望まれる。

3　円に近い曲線, 直線に近い曲線

C を E^2 内の単純閉曲線とするとき, k を符号付きの曲率, s を弧長パラメータとして

$$\int_C k\,ds = 2\pi$$

が成り立つが, これに Cauchy–Schwarz の不等式を適用すると

$$\int_C k^2 ds \geq \frac{1}{L}\left(\int_C k\right)^2 = \frac{4\pi^2}{L}$$

が成り立ち, 等号は k が定数, すなわち, C が円のときに成り立つことがわかる。このことから $\int_C k^2 ds - \frac{4\pi^2}{L}$ が 0 に近い E^2 内の単純閉曲線の形は円に近いことが推測されるが, [4] において筆者はこの問題を定量的に考察し, ε を (十分に小さい) 任意の正の数, R を C の外接円の半径, r を内接円の半径とするとき,

$$\int_C k^2\,ds - \frac{4\pi^2}{L} < \frac{2\pi^2\varepsilon^2}{L^3} \Longrightarrow R - r < \varepsilon$$

が成り立つことを示した。単純閉曲線の曲率が各点ごとに一定値に十分近ければその曲線が円に近いことは比較的容易に証明することができるが, この定理では曲線の一部では曲率が平均値から大きくずれていてもよい。[4] では S^2 内の単純閉曲線についても類似の定理を証明している。

$C : x(s)$ (s:弧長パラメータ, $-\infty < s < \infty$) を Euclid 空間 E^n の曲線, $\kappa(s)$ を C の曲率とする。κ がいたるところで 0 であるとき, C は直線となるが, $\kappa(s) \to 0$ $(s \to \infty)$ であるからと言って, (極座標 (r, θ) を用いて $r = \theta$ で表される E^2 内の曲線を考えるとわかるように) C が直線に「近い」とは限らない。[3] で筆者は C について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa(s)|x(s)|\,ds < \infty$$

が成り立つとき, C は $s \to \infty$, $s \to -\infty$ のそれぞれで漸近線をもつことを示した。このとき, C は単にある直線に近づくだけではなく, 単位接ベクトルは定ベクトルに収束する。もし $\kappa(s)|x(s)|^{2+\varepsilon}$ が有界であれば上の条件はみたされるが, この定理では $\kappa(s)$ が各点ごとに抑えられる必要はない。[3] では, 双曲空間内の曲線については $\int_{-\infty}^{\infty} \kappa(s) ds < \infty$ であれば漸近線をもつことを示している。

4 曲線の折れ線近似

[1] で筆者は Riemann 多様体内の曲線の長さの「折れ線」による近似の精度について考察した。$C : x(t)$ $(a \leq t \leq b)$ を任意の Riemann 多様体内の曲線, $\{p_0, p_1, \ldots, p_N\}$ を $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b$, $p_k = x(t_k)$ によって定まる C の分割とする。$p_{k-1}p_k$ を p_{k-1} と p_k を結ぶ測地線分とし, $P_N = p_0p_1 \cup p_1p_2 \cup \ldots \cup p_{N-1}p_N$ とする。C の長さを L, P_N の長さを $L(P_N)$ とするとき, 適当な分割をとると $N \to \infty$ のとき $L - L(P_N) \to 0$ となり, さらに $N(L - L(P_N)) \to 0$ とすることもできるが, $N^2(L - L(P_N))$ については限界があり,

$$\lim_{N\to\infty} N^2(L - L(P_N)) \geq \frac{1}{24}\left(\int_0^L \kappa(s)^{2/3}ds\right)^3$$

が成り立つ。この等号を実現する分割はつねに存在するので, 最善の評価と言える。これは Euclid 空間内の曲線について証明された Gleason の定理 (1979 年) を一般化したものである。

さて, 隣接する 2 つの分点を測地線分で結ぶ代わりに, 連続する 3 つの分点を通る円弧で近似すると, 長さの近似の精度は良くなる。さらに, 曲線が Euclid 空間内にあるとき, この近似円弧の半径の逆数をもって曲線の曲率を近似することができる。この考えに基づいて, [11] では E^3 内の曲線 C の $\int \kappa^2$ の値を近似する問題を考察した。Q_N を C の円弧による近似, $K(Q_N)$ を Q_N を用いた $\int_0^L \kappa(s)^2 ds$ の近似値とする。このとき, 適当な分割をとると $|\int \kappa^2 - K(Q_N)| \to 0$ となり, さらに $N\,|\int \kappa^2 - K(Q_N)| \to 0$ とすることもできるが, $N^2\,|\int \kappa^2 - K(Q_N)|$ については限界がある。$\alpha(s) := 2\kappa'(s)^2 + \kappa(s)\kappa''(s) + \kappa(s)^2\tau(s)^2$ とおくとき, もし $\alpha(s)$ が C 上で符号を変えないならば

$$\lim_{N\to\infty} N^2 \left|\int_0^L \kappa(s)^2 ds - K(Q_N)\right| \geq \frac{1}{24}\left(\int_0^L |\alpha(s)|^{1/3} ds\right)^3$$

が成り立つ。この不等式で等号が成り立つような分割はつねに存在するので, これが最善の評価と言える。

参考文献

[1] K. Enomoto, *Approximation of length of curves in Riemannian manifolds by geodesic polygons*, Yokohama Math. J. **34** (1986), 53–58.

[2] K. Enomoto, *A generalization of the isoperimetric inequality on S^2 and flat tori in S^3*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 553–558.

[3] K. Enomoto, *Plane curves with asymptotic lines*, Kyushu J. Math. **49** (1995), 317–319.

[4] K. Enomoto, *Closed curves in E^2 and S^2 whose total squared curvatures are almost minimal*, Geom. Dedicata **65** (1997), 193–201.

[5] K. Enomoto, *The total absolute curvature of nonclosed plane curves of fixed length*, Yokohama Math. J. **48** (2000), 83–96.

[6] K. Enomoto, *Curves with asymptotic geodesics*, Kyushu J. Math. **56** (2002), 137–145.

[7] K. Enomoto and J. Itoh, *The total absolute curvature of nonclosed curves in S^2*, Results Math. **45** (2004), 21–34.

[8] K. Enomoto and J. Itoh, *The total absolute curvature of nonclosed curves in S^2 (II)*, Results Math. **45** (2004), 230–240.

[9] K. Enomoto, J. Itoh and R. Sinclair, *The total absolute curvature of open curves in E^3*, Illinois J. Math. **52** (2008), 47–76.

[10] K. Enomoto and J. Itoh, *The total absolute torsion of open curves in E^3*, Illinois J. Math. **57** (2013), 665–684.

[11] K. Enomoto and M. Okura, *The total squared curvature of curves and approximation by piecewise circular curves*, Results Math. **64** (2013), 215–228.

[12] K. Enomoto and J. Itoh, *The total mixed curvature of open curves in E^3*, Geom. Dedicata **194** (2018), 131–140.